Euclide, La scuola di Atene di Raffaello

GEOMETRIA

La geometria che iniziamo a studiare è detta euclidea, perché si basa sul lavoro di Euclide (III a.C.), matematico greco autore di un'opera suddivisa in 13 libri, gli Elementi.

feb 25-10:12

Negli Elementi compaiono definizioni (OPOI) e postulati (AITHMATA)

ΟΡΟΙ

α΄. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
β΄. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
γ΄. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
δ΄. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.
ε΄. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
ϛ΄. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
ζ΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

ΑΙΤΗΜΑΤΑ

α΄. Ἠιτήσθω ἀπο παντος σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.
β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν.
γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι.
δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.

Definizioni di Euclide:

1. Punto è ciò che non ha parti.
2. Linea è una lunghezza senza larghezza.
3. Gli estremi di una linea sono punti.
4. Una retta è una linea uniformemente disposta rispetto ai punti su di essa.
5. Una superficie è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.
6. Gli estremi di una superficie sono linee.
7. Superficie piana è quella uniformemente disposta rispetto alle rette su di essa.

Queste definizioni sono state oggetto di critica da parte di alcuni matematici nel XIX secolo, perché ognuna di loro fa riferimento ad altri enti, a loro volta non ancora definiti. Si è pensato che fosse opportuno introdurre gli enti primitivi, cioè entità di cui non dare una definizione e con le quali definire gli altri elementi geometrici.

Gli enti che assumiamo come primitivi sono il punto, la retta, il piano, lo spazio.

Gli assiomi o postulati sono proposizioni che si accettano come tali, senza dimostrarli.

I primi 4 postulati di Euclide erano:

Si richiede che
1. Sia possibile condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto.
2. Sia possibile prolungare illimitatamente una retta finita in linea retta.
3. Sia possibile descrivere un cerchio con qualsiasi centro e distanza (raggio) qualsiasi.
4. Tutti gli angoli retti sono uguali fra loro

Il matematico David Hilbert, alla fine del XIX secolo, propose una nuova "assiomatizzazione" della geometria, sostituendo i 5 postulati di Euclide con altre 21 proposizioni, al fine di evitare le imprecisioni e le contraddizioni presenti nell'opera del matematico greco.

Non esiste una sola geometria. Per definirne una basta disarmed gli enti primitivi e scegliere gli assiomi. Questi devono però avere alcune proprietà:

ciò che asserisce un assioma non deve dipendere dall'enunciato di un altro assioma

COMPLETEZZA

un postulato non può essere in contraddizione con un altro

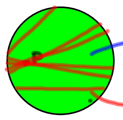
l'insieme degli assiomi scelto deve permettere di ricavare ogni altra proposizione e teorema della geometria in questione

Il più famoso tra gli assiomi
di Euclide è il quinto:

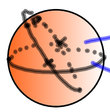
(V) da punto esterno a una retta e' possibile tracciare una e una sola retta // a quella data

Nell'800 → E $\propto$ il V postulato si poteva dimostrare?

Gauss, Riemann, Bolyai, Lobacevskij, Klein, Poincaré hanno lavorato sulla questione, arrivando alla conclusione che il V postulato non è dimostrabile, perché in alcuni contesti è FALSO.



Da un punto P esterno ad una retta si possono tracciare infinite parallele alla retta data.



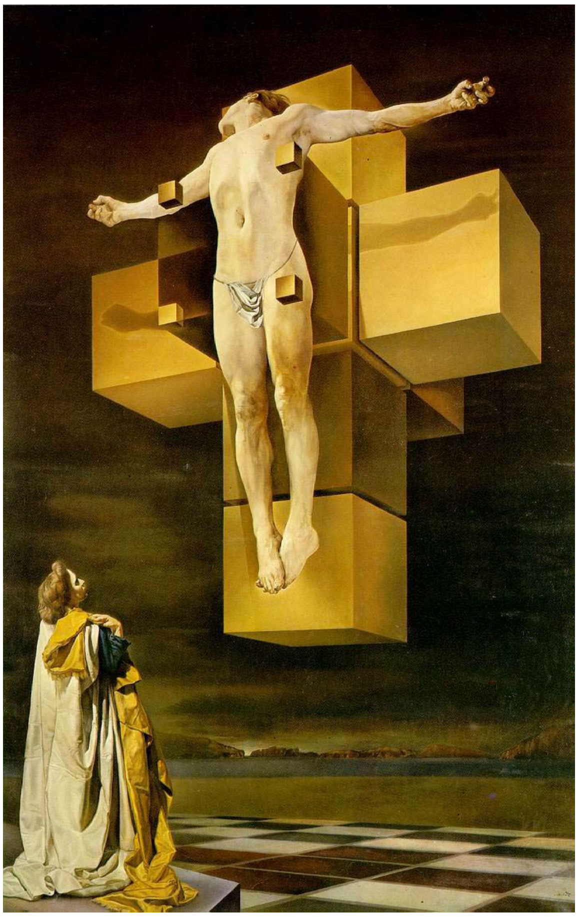
Da un punto P esterno ad una retta non si possono tracciare parallele alla retta data.
Due rette si intersecano sempre.

QUESTE OSSERVAZIONI HANNO INTRODOTTO LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

CONSIDERAZIONI derivate dalle geometrie non euclidee:

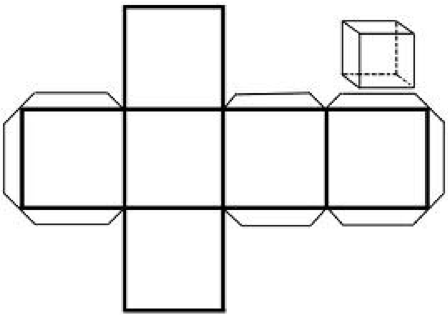
LO SPAZIO E' QUELLO CHE NOI IMMAGINIAMO, TRIDIMENSIONALE, O ESISTE UNO SPAZIO DIVERSO CHE NOI NON RIUSCIAMO A PERCEPIRE A CAUSA DEI NOSTRI SENSI E DEL FATTO CHE SIAMO TRIDIMENSIONALI?

feb 25-10:12

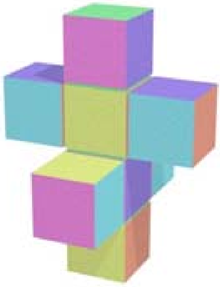


Non possiamo visualizzare un cubo con 4 dimensioni; però possiamo visualizzare il suo sviluppo nello spazio a tre dimensioni

Salvador Dalì: "Crocifissione, corpo ipercubico" 1954, olio su tela, 194,5x124 cm.
Metropolitan Museum of Art New York



sviluppo piano di un cubo



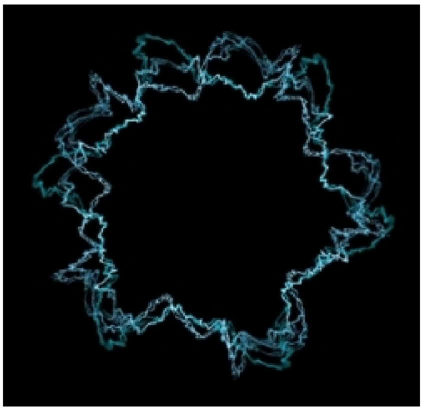
sviluppo nello spazio di un ipercubo, cioè di un cubo a 4 dimensioni

Teoria delle stringhe

La teoria delle stringhe, o teoria del tutto, è una delle teorie fisiche più recenti, secondo la quale tutta la materia è formata da stringhe di dimensioni pari alla lunghezza di Planck (10 elevato alla -33 centimetri) che vibrano e che, a seconda delle loro vibrazioni, generano le diverse particelle subatomiche e le forze con cui interagiscono.

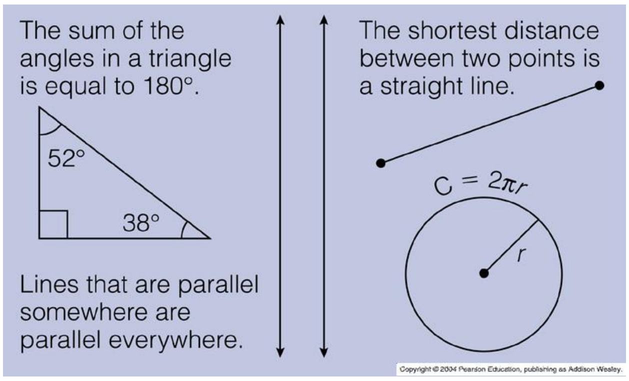
http://www.youtube.com/watch?v=3vV8b5UIhmc

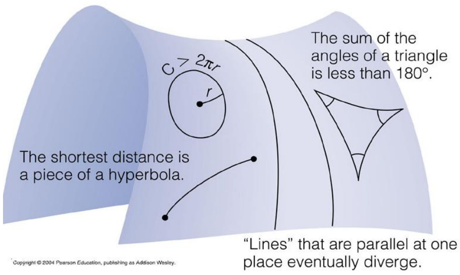
Lo spazio della teoria delle stringhe ha 11 dimensioni (almeno.. sembra che per descrivere alcuni fenomeni ne siano necessarie 26)



http://www.oswego.edu/~kanbur/a100/lecture15.html

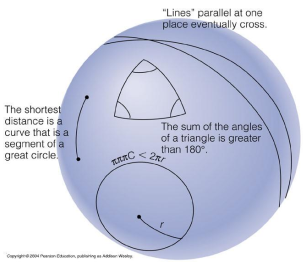
Geometria euclidea





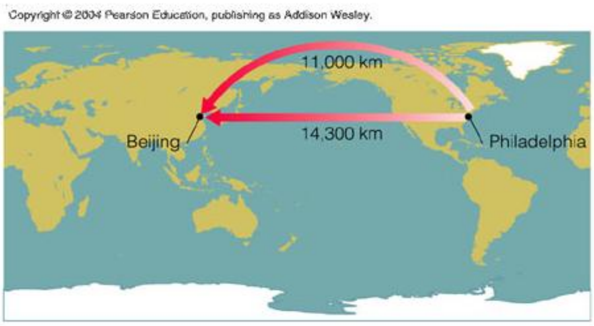
Modello di Klein

Geometria iperbolica



Modello di Riemann

Geometria ellittica



http://www.oswego.edu/~kanbur/a100/lecture15.html

La via più breve

E. Giusti - Il giardino di Archimede

Una delle proprietà della retta è di essere la linea più breve tra due punti. Così, se vogliamo attraversare una piazza, sarà più conveniente muoversi in linea retta piuttosto che seguire un qualsiasi altro cammino.

Se però vogliamo andare a New York, non potremo seguire una linea retta, dato che la terra è rotonda e sulla sua superficie non ci sono linee rette. Su una superficie curva, il posto delle rette viene preso dalle curve geodetiche, lungo le quali il percorso è il più breve possibile.
Sulla sfera, le geodetiche sono i cerchi massimi, cioè i cerchi il cui piano passa per il centro della sfera. Se vogliamo andare da A a B, possiamo immaginare che A sia un polo e seguire il meridiano che passa per B.
Le rotte polari rispondono all'esigenza di percorrere il minor cammino possibile, in modo da risparmiare tempo e carburante. Per viaggiare tra due città alla stessa latitudine, non conviene seguire un parallelo, ma piuttosto deviare verso il polo.

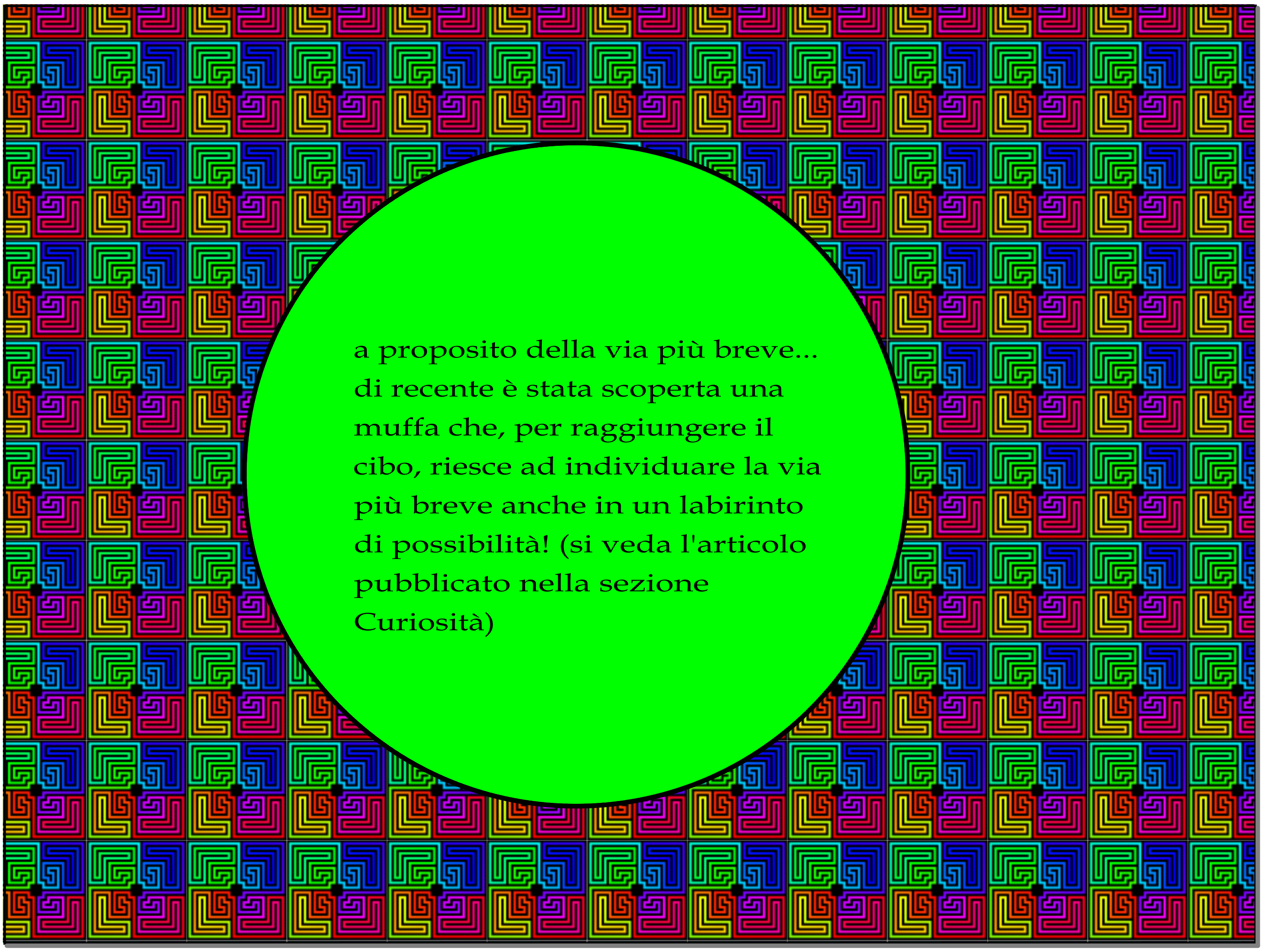
Le geodetiche di una superficie si possono trovare risolvendo un'equazione differenziale, che coinvolge la metrica della superficie, cioè il modo di misurare le distanze di punti vicini. Questa metrica varia da una superficie a un'altra, e talvolta si possono usare metriche diverse sulla stessa superficie. Ad esempio, mentre le distanze usuali si misurano in linea d'aria, in montagna si preferisce misurare in ore di cammino, per cui le distanze in salita risultano più lunghe di quelle in piano.

Una distanza interessante è la metrica di Poincaré (Henri Poincaré, 1854-1912). Immaginiamo di muoverci in un semipiano delimitato da una retta, l'orizzonte, e riempito da un liquido che diviene sempre più vischioso man mano che ci si avvicina all'orizzonte, in modo che per percorrere lo stesso spazio occorra un tempo sempre maggiore, inversamente proporzionale alla distanza dall'orizzonte. La distanza di Poincaré tra due punti è il tempo impiegato per andare da uno all'altro. In questo universo, la distanza tra due rette verticali va aumentando via via che ci si muove verso l'orizzonte. A questa retta non si arriva mai: l'orizzonte è a distanza infinita.

Il cammino più breve tra due punti è una retta, solo se i due punti stanno sulla stessa verticale; altrimenti conviene allontanarsi dalla zona vischiosa. Le geodetiche, che prendono il posto delle rette, sono le circonferenze con centro sull'orizzonte.

Nel semipiano di Poincaré non vale il postulato delle parallele: per un punto pasano infinite parallele a una retta data.

Le geodetiche rivestono un'importanza particolare in relatività generale. Una delle intuizioni di Einstein è che lo spazio si incurvi nelle vicinanze dei corpi celesti. Di conseguenza, un raggio di luce che passi nelle vicinanze del sole, si muoverà lungo una geodetica sensibilmente diversa da una retta. La deviazione dei raggi luminosi, osservata durante le eclissi di sole, è una delle conferme sperimentali della relatività generale.



a proposito della via più breve...
di recente è stata scoperta una muffa che, per raggiungere il cibo, riesce ad individuare la via più breve anche in un labirinto di possibilità! (si veda l'articolo pubblicato nella sezione Curiosità)